آزمون نهایی درس محاسبات کوانتومی. مدت زمان امتحان ۳ ساعت.

1- ■ فاصله رد [۱۱] بین دو حالت زیر را محاسبه کنید:

$$\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|, \qquad \sigma = \frac{2}{3}|+\rangle\langle +| + \frac{1}{3}|-\rangle\langle -|. \qquad (۱۷۹)$$

2- ■ فرض کنید که $\mathcal{E}$ یک کانال کوانتومی ردّ_نگهدار است که فاصله ها را اکیدا کم می کند، یعنی $D(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma)) < D(\rho, \sigma)$. این نوع کانال ها، اکیداً انقباضی [۱۳] نامیده می شوند. نشان دهید که این کانال حتما یک نقطه ثابت دارد.

3- ■ فرض کنید که $\mathcal{E}$ یک کانال کوانتومی ردّ_نگهدار است که به صورت زیر عمل می کند:

$$\mathcal{E}(\rho) = p\rho_0 + (1-p)\mathcal{E}'(\rho) \qquad 0 < p \leq 1. \qquad (۱۸۱)$$

به عبارت دیگر این کانال حالت ρ را با یک احتمال غیر صفر با یک حالت ثابت ρ_0 جایگزین می کند و با احتمال $(1-p)$ کانال $\mathcal{E}'$ را روی آن اثر می دهد. نشان دهید که کانال $\mathcal{E}$ یک کانال اکیدا انقباضی است و در نتیجه یک نقطه ثابت دارد.

4- ■ خلوص یک حالت با رابطه $F(\rho) := Tr(\rho^2)$ تعریف می شود. نشان دهید که خلوص یک حالت می تواند با مخلوط کردن آن حالت با یک حالت دیگر افزایش یابد. مثال مشخصی ارایه کنید.

5- ■ فرض کنید که ρ و ρ' دو حالت متفاوت باشند. نشان دهید که حتما یک عملگر مثبت E وجود دارد به نحوی که $Tr(\rho E) \neq Tr(\rho' E)$ باشد. این نتیجه به این معناست که حتما یک اندازه گیری ای وجود دارد که به کمک آن بتوان حالت های متفاوت را از هم تمیز داد.

6- ■ تمرین: دو حالت خالص d بعدی $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ را در نظر بگیرید و آنها را از کانال واقطبش d بعدی عبور دهید. کانال واقطبش d بعدی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p\frac{I}{d}. \qquad (۱۳۲)$$

الف: تشابه دو حالت بالا را قبل از ورود به کانال و بعد از خروج از آن با هم مقایسه کنید.

ب: فاصله دو حالت بالا را قبل از ورود به کانال و بعد از خروج از آن با هم مقایسه کنید.

۱

■ فاصله رد [11] بین دو حالت زیر را محاسبه کنید:

$$\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|, \qquad \sigma = \frac{2}{3}|+\rangle\langle +| + \frac{1}{3}|-\rangle\langle -|. \tag{۱۷۹}$$

برای هر دو حالت دلخواه ρ, σ، فاصله ردّ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}|\rho-\sigma| = \frac{1}{2}\sum_i |\lambda_i|$$

که در آن λ_i ها، ویژه مقادیر $\rho-\sigma$ هستند. می‌دانیم که:

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad \sigma = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \rho-\sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{12}\sqrt{13}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{12}(-\sqrt{13}) \rightarrow \boxed{D(\rho,\sigma) = \frac{\sqrt{13}}{12}}$$

5 نمره

2

■ فرض کنید که $\mathcal{E}$ یک کانال کوانتومی ردّ-نگهدار است که فاصله ها را اکیدا کم می کند، یعنی $D(\mathcal{E}(\rho),\mathcal{E}(\sigma)) < D(\rho,\sigma)$. این نوع کانال ها، اکیداً انقباضی [13] نامیده می شوند. نشان دهید که این کانال حتما یک نقطه ثابت دارد.

if $D(\mathcal{E}(\rho),\mathcal{E}(\sigma)) < D(\rho,\sigma) \rightarrow \lim_{n\to\infty} D(\mathcal{E}^n(\rho),\mathcal{E}^n(\sigma)) = 0 \rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}^n(\rho) = x$ where x is independent of the initial state ρ.

Note that x cannot be 0, due to the trace-preserving condition

So $\rightarrow$ $\mathcal{E}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}^{n+1}(\rho) = x \rightarrow \mathcal{E}(x) = x.$

۱۰ نمره

3

■ فرض کنید که $\mathcal{E}$ یک کانال کوانتومی ردّ-نگهدار است که به صورت زیر عمل می کند:

$$\mathcal{E}(\rho) = p\rho_0 + (1-p)\mathcal{E}'(\rho) \qquad 0 < p \leq 1. \qquad (۱۸۱)$$

به عبارت دیگر این کانال حالت ρ را با یک احتمال غیر صفر با یک حالت ثابت ρ_0 جایگزین می کند و با احتمال $(1-p)$ کانال $\mathcal{E}'$ را روی آن اثر می دهد. نشان دهید که کانال $\mathcal{E}$ یک کانال اکیدا انقباضی است و در نتیجه یک نقطه ثابت دارد.

Let P^* be a projector which satisfies the following:

$D(\mathcal{E}(\rho),\mathcal{E}(\sigma)) = \mathrm{Tr}[P^*(\mathcal{E}(\rho)-\mathcal{E}(\sigma))] \rightarrow$

$D(\mathcal{E}(\rho),\mathcal{E}(\sigma)) = \mathrm{Tr}\{P^*((1-p)(\mathcal{E}'(\rho)-\mathcal{E}'(\sigma))\} = (1-p)\,\mathrm{Tr}[P^*\mathcal{E}'(\rho-\sigma)]$

$\leq (1-p)\, D(\mathcal{E}'(\rho),\mathcal{E}'(\sigma)) \leq (1-p)\, D(\rho,\sigma) \rightarrow$ for $p\neq 0$,

$D(\mathcal{E}(\rho),\mathcal{E}(\sigma)) < D(\rho,\sigma)$ بنابراین کانال اکیداً انقباضی است.

۱۵ نمره

4 ■ خلوص یک حالت با رابطه $F(\rho) := Tr(\rho^2)$ تعریف می شود. نشان دهید که خلوص یک حالت می تواند با مخلوط کردن آن حالت با یک حالت دیگر افزایش یابد. مثال مشخصی ارایه کنید.

5 ■ فرض کنید که ρ و ρ' دو حالت متفاوت باشند. نشان دهید که حتما یک عملگر مثبت E وجود دارد به نحوی که $Tr(\rho E) \neq Tr(\rho' E)$ باشد. این نتیجه به این معناست که حتما یک اندازه گیری ای وجود دارد که به کمک آن بتوان حالت های متفاوت را از هم تمیز داد.

حل 4

Exampl. let $\rho_0 = \frac{I}{2}$ and $\rho = (1-p)\frac{I}{2} + p|\psi\rangle\langle\psi|$

$Tr\,\rho_0^2 = \frac{1}{2}$ $\quad Tr\,\rho^2 = Tr\left\{(1-p)^2\frac{I}{4} + p(1-p)|\psi\rangle\langle\psi| + p^2|\psi\rangle\langle\psi|\right\} =$

$= \frac{1}{2}(1-p)^2 + p(1-p) + p^2 = \frac{1}{2}(1-p)^2 + p = \frac{1}{2}(1+p^2) > \frac{1}{2}$. ✓

۱۰ نمره

حل 5 چون ρ با ρ' متفاوت است ← $\rho - \rho' \neq 0$. این ماتریس هرمیتی است و بنابراین یک تجزیه طیفی دارد که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho - \rho' = \lambda_0 |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| + \sum_i \lambda_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \qquad \lambda_0 \neq 0$$

که در آن $\forall i,\ 0 = \langle\varphi_0|\varphi_i\rangle$ ①: E را به صورت $|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|$ در نظر می‌گیریم:

در نتیجه با توجه به رابطه ① خواهیم داشت:

$$Tr(E(\rho-\rho')) = Tr(|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| [\lambda_0|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| + \dots]) = \lambda_0$$

بنابراین یک عملگر مثبت E وجود دارد که برای آن $0 \neq Tr(E(\rho-\rho'))$ است.

۱۰ نمره

6

■ تمرین: دو حالت خالص d بعدی $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ را در نظر بگیرید و آنها را از کانال واقطبش d بعدی عبور دهید. کانال واقطبش d بعدی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p\frac{I}{d}. \qquad (۱۳۲)$$

الف: تشابه دو حالت بالا را قبل از ورود به کانال و بعد از خروج از آن با هم مقایسه کنید.

ب: فاصله دو حالت بالا را قبل از ورود به کانال و بعد از خروج از آن با هم مقایسه کنید.

می‌دانیم که اثر کانال واقطبش به این صورت است:

$$\mathcal{E}(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = (1-p)|\varphi\rangle\langle\varphi| + \frac{I}{d}$$

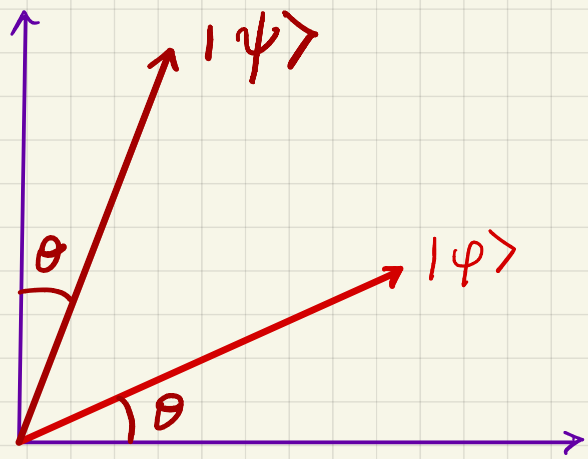
$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = (1-p)|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{I}{d}$$

برای حل فرض یک پایه به صورت زیر انتخاب می‌کنیم،

$$B = \{ |0\rangle, |1\rangle, \ |i\rangle \quad i = 2, 3, \dots d-1 \}$$

می‌توان این پایه را چنان انتخاب کرد که $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ در صفحه $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ قرار بگیرند. هم چنین

می‌توان در این صفحه بردارهای $|0\rangle, |1\rangle$ را چنان انتخاب کرد که وضعیت ساده و متقارن زیر به وجود آید:



$$|\varphi\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$$

$$|\psi\rangle = \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle$$

در نتیجه ←

$$\langle\varphi|\psi\rangle = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta.$$

برای سادگی از این به بعد قرار میدیم : $C = \cos\theta$, $S = \sin\theta$.

Let $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, $\sigma = |\psi\rangle\langle\psi|$

$$\rightarrow \rho = |\varphi\rangle\langle\varphi| = \underbrace{\begin{vmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{vmatrix}}_{\rho_0} \oplus O_{d-2} \equiv \left|\begin{array}{c|c} \rho_0 & \\ \hline & O_{d-2} \end{array}\right|$$

$$\sigma = |\psi\rangle\langle\psi| = \underbrace{\begin{vmatrix} S^2 & CS \\ CS & C^2 \end{vmatrix}}_{\sigma_0} \oplus O_{d-2} \equiv \left|\begin{array}{c|c} \sigma_0 & \\ \hline & O_{d-2} \end{array}\right|$$

که درآن ρ_0 , σ_0 ماتریس های ۲x۲ هستند.

$$\rightarrow \mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p\frac{I}{d} = \left|\begin{array}{c|c} (1-p)\rho_0 + p\frac{I_2}{d} & \\ \hline & p\frac{I_{d-2}}{d} \end{array}\right| \equiv \begin{vmatrix} \tilde{\rho} & \\ & p\frac{I_{d-2}}{d} \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \mathcal{E}(\sigma) = (1-p)\sigma + p\frac{I}{d} = \left|\begin{array}{c|c} (1-p)\sigma_0 + p\frac{I_2}{d} & \\ \hline & p\frac{I_{d-2}}{d} \end{array}\right| \equiv \begin{vmatrix} \tilde{\sigma} & \\ & \frac{p}{d}I_{d-2} \end{vmatrix}$$

حل الف :

تشابه قبل از ورود به کانال : $\longrightarrow$ چون حالت‌ها هر دو خالص هستند $\longrightarrow$ $F(|\varphi\rangle, |\psi\rangle) = |\langle\varphi|\psi\rangle| = \sin 2\theta .$

تشابه بعد از خروج از کانال : $\longrightarrow$ $F(\rho, \sigma) = \operatorname{Tr}\sqrt{\sqrt{\rho}\,\sigma\sqrt{\rho}}$

با توجه به فرم بلوک قطری ماتریس‌های فوق

$$\rho = \begin{vmatrix} \tilde{\rho} & \\ & \frac{p}{d} I_{d-2} \end{vmatrix} \qquad \sigma = \begin{vmatrix} \tilde{\sigma} & \\ & \frac{p}{d} I_{d-2} \end{vmatrix}$$

$$F(\rho,\sigma) = \operatorname{Tr}\sqrt{\sqrt{\rho}\,\sigma\sqrt{\rho}} = \operatorname{Tr}\sqrt{\begin{vmatrix} \sqrt{\tilde{\rho}}\,\tilde{\sigma}\sqrt{\tilde{\rho}} & \\ & \frac{p^2}{d^2} I_{d-2} \end{vmatrix}}$$

$$= \operatorname{Tr}\begin{vmatrix} \sqrt{\sqrt{\tilde{\rho}}\,\tilde{\sigma}\sqrt{\tilde{\rho}}} & \\ & \frac{p}{d} I_{d-2} \end{vmatrix} = \operatorname{Tr}\sqrt{\sqrt{\tilde{\rho}}\,\tilde{\sigma}\sqrt{\tilde{\rho}}} + \frac{p}{d}(d-2)$$

Let $A = \sqrt{\tilde{\rho}}\,\tilde{\sigma}\sqrt{\tilde{\rho}}$ from the identity $(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$

$$\rightarrow (\operatorname{Tr}\sqrt{A})^2 = \operatorname{Tr} A + 2\sqrt{\det A} \rightarrow \operatorname{Tr}\sqrt{A} = \sqrt{\operatorname{Tr} A + 2\sqrt{\det A}}$$

$$\rightarrow \operatorname{Tr}\sqrt{\sqrt{\tilde{\rho}}\,\tilde{\sigma}\sqrt{\tilde{\rho}}} = \sqrt{\operatorname{Tr}(\tilde{\rho}\tilde{\sigma}) + 2\sqrt{\det\tilde{\rho}\,\det\tilde{\sigma}}} \qquad (**)$$

from $(*)$ $\longrightarrow$ $\operatorname{Tr}(\tilde{\rho}\tilde{\sigma}) = (1-p)^2 \operatorname{Tr}(\rho_0\sigma_0) + \frac{p(1-p)}{d}(\operatorname{Tr}\rho_0 + \operatorname{Tr}\sigma_0) + p^2\frac{2}{d^2}$

$$= (1-p)^2 \operatorname{Tr}(\rho_0\sigma_0) + \frac{2p(1-p)}{d} + p^2\frac{2}{d^2}$$

Note: $\tilde{\rho} = (1-p)\rho_0 + \frac{p}{d} I_2$

$\tilde{\sigma} = (1-p)\sigma_0 + \frac{p}{d} I_2$

But $Tr(\rho_\circ \sigma_\circ) = Tr(\,|\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle\langle\varphi|\,) = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2 \longrightarrow$

$$\to \quad Tr(\tilde{\rho}\,\tilde{\sigma}) = (1-p)^2\,|\langle\varphi|\psi\rangle|^2 + \frac{2p(1-p)}{d} + \frac{2p^2}{d^2} \qquad *{*}*$$

هم‌چنین داریم،

$$\det\tilde{\rho} = \det\begin{vmatrix} (1-p)c^2+\frac{p}{d} & (1-p)cs \\ (1-p)cs & (1-p)s^2+\frac{p}{d} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{d}(1-p)p + \frac{p^2}{d^2} = \det\tilde{\sigma}$$

با ترکیب روابطی که به‌دست آوردیم خواهیم داشت،

$** \;\&\; *{*}* \longrightarrow$

$$F(\tilde{\rho},\tilde{\sigma}) = \sqrt{(1-p)^2\,|\langle\varphi|\psi\rangle|^2 + \frac{2p(1-p)}{d} + \frac{2p^2}{d^2} + 2\left[\frac{(1-p)p}{d} + \frac{p^2}{d^2}\right]}$$

پس از ساده‌سازی ←

$$\to F(\tilde{\rho},\tilde{\sigma}) = \sqrt{(1-p)^2\,F^2(\varphi,\psi) + \frac{4p(1-p)}{d} + \frac{4p^2}{d^2}}$$

و نهایتاً،

$$F(\rho,\sigma) \equiv F(\tilde{\rho},\tilde{\sigma}) + \frac{p}{d}(d-2) =$$

$$\boxed{F(\rho,\sigma) = \sqrt{(1-p)^2 F^2(\varphi,\psi) + \frac{4p(1-p)}{d} + \frac{4p^2}{d^2} + \frac{p}{d}(d-2)}}$$ جواب نهایی

A few tests of this solution:

① if $p=0 \rightarrow$ we have the identity channel $\rightarrow$ $F(\rho,\sigma) = F(\varphi,\psi)$.

② if $p=1 \rightarrow$ " " $\mathcal{E}(\rho) = \frac{I}{d}$ $\forall \rho \rightarrow F(\rho,\sigma) = \frac{2}{d} + \frac{1}{d}(d-2) = 1$, as it should be since the output is always the same.

③ if $\varphi = \psi \rightarrow$
$$F(\rho,\sigma) = \sqrt{(1-p)^2 + \frac{4p(1-p)}{d} + \frac{4p^2}{d^2} + \frac{p}{d}(d-2)}$$
$$= \sqrt{\left(1-p+\frac{2p}{d}\right)^2 + \frac{p}{d}(d-2)} = 1-p+\frac{2p}{d} + p - \frac{2p}{d} = 1,$$
as it should be, since the two final states are the same

پاسخ قسمت ب)

فاصله قبل از ورود به کانال : $D(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left|\, |\varphi\rangle\langle\varphi| - |\psi\rangle\langle\psi| \,\right|$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\begin{vmatrix} c^2-s^2 & 0 \\ 0 & s^2-c^2 \end{vmatrix} = c^2-s^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

$$\rightarrow D(\varphi,\psi) = \sqrt{1-|\langle\varphi|\psi\rangle|^2}$$

فاصله از خروج حالت از ابتدا:

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left| (1-p)\rho + \frac{I}{d} - (1-p)\sigma - \frac{I}{d} \right| =$$

۲۰ نمره $= (1-p)\ \frac{1}{2} \mathrm{Tr} |\rho - \sigma| = (1-p) D(\psi,\sigma).$

مجموع نمره های سوالات ۷۰ نمره